CONCOURS D'ADMISSION A

l' Ecole Nationale Supérieure des Ingénieurs des Etudes et Techniques d' Armement

1991

MATHEMATIQUES 2 Options M et P **Durée : 4 heures**

L'exercice et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque, sous réserve de les identifier clairement sur la copie.

Note très importante : Toute copie illisible ou mal présentée sera pénalisée. Les résultats demandés seront soigneusement encadrés et mis en évidence, et les démonstrations seront étayées par des références précises à des théorèmes du cours.

EXERCICE

Soit n un entier naturel non nul, w l'une des racines nième de l'unité : $w \in \mathbb{C}$, $w^n = 1$.

W désigne la matrice unicolonne à n coefficients, indexés de 1 à n, le ième étant w^{i-1}.

$A_n(w)$ désigne la matrice carrée à n colonnes, le ième terme de la jème colonne étant w^{i+j-2}.

1 - a - Ecrire $A_2(-1)$ et $A_4(-1)$.

b - Préciser, selon w, le nombre $w^0 + w^1 + w^2 + \ldots + w^{n-1}$

c - Donner le rang et l'image de $A_n(w)$.

2 - a - Dans quels cas $A_n(w)$ est-elle diagonalisable ?

b - Calculer, selon la valeur de w, $A_n^2(w)$.

c - w' étant également une racine de : $z \in \mathbb{C}$, $z^n = 1$, calculer $A_n(w) \bullet A_n(w')$.

d - Lorsque cette matrice est non nulle, et w non réel, on la note $B_n(w,w')$.
Dans ce cas, calculer les produits de deux quelconques des matrices :
$A_n(w)$, $A_n(w')$, $B_n(w,w')$, $B_n(w',w)$.

3 - On suppose maintenant que n = 3, les racines de $z^3 = 1$ étant $1, j, \bar{j}$.
On note $U, A, \bar{A}, B, \bar{B}$ les matrices $A_3(1)$, $A_3(j)$, $A_3(\bar{j})$, $B_3(j,\bar{j})$, $B_3(\bar{j},j)$.
E est l'espace vectoriel complexe engendré par $(U, A, \bar{A}, B, \bar{B})$.

a - Expliciter les matrices $U, A, \bar{A}, B, \bar{B}$.

b - Montrer que E est stable pour la multiplication des matrices.

c - Déterminer la dimension de E.

A SUIVRE

4 - F est l'ensemble des matrices réelles appartenant à E.

a - Montrer que F est l'espace vectoriel réel de matrices engendré par

$$U\ ,\ X = A + \overline{A}\ ,\ Y = \frac{A - \overline{A}}{j - \overline{j}}\ ,\ Z = B + \overline{B}\ ,\ T = \frac{B - \overline{B}}{j - \overline{j}}$$

et donner sa dimension.

b - Montrer que F est stable pour la multiplication des matrices et contient la matrice unité I_3.

c - Montrer que $(F, +, ., \times)$ et $(E, +, ., \times)$ sont des algèbres ~~non-unitaires~~. (Le point (.) étant ici le symbole de la multiplication d'un vecteur par un scalaire).

PROBLEME

PRELIMINAIRE

1 - Au vecteur D de $\mathbb{R}^3$ tel que ${}^tD = [u, v, h]$ on associe, dans un plan affine euclidien muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé, l'ensemble L (D) des points dont les coordonnées x, y vérifient : $ux + vy + h = {}^tD.X = 0$, où $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$.

a - Préciser dans quel cas cet ensemble L (D) est une droite.

b - D étant donné tel que L (D) est une droite, montrer qu'il existe D', ${}^tD' = [u', v', h']$ vérifiant soit $u' = 1$, soit $u' = 0$ et $v' = 1$, et tel que L (D') = L (D).

2 - Donner l'ensemble des matrices réelles, symétriques et orthogonales, à 2 lignes et 2 colonnes.

La question suivante est indépendante du reste du problème.

3 - Montrer que l'ensemble E des matrices réelles symétriques, orthogonales, à 3 lignes et 3 colonnes est :

$$E' = \left\{ \varepsilon \cdot \begin{bmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{où } \varepsilon = 1 \text{ ou } -1 \\ \text{et } a^2+b^2+c^2 = 1 \end{array} \right\} \cup \left\{ I_3, -I_3 \right\}.$$

A défaut, montrer au moins que E ' est inclus dans E.

4 - On donne, dans un espace euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une conique C située dans le plan $z = 1$, dont un système d'équations cartésiennes est : $mx^2 + 2pxy + ny^2 + 2qx + 2ry + s = 0\ ,\ z = 1$.

a - Donner l'équation du cône de sommet O contenant cette conique.

Tournez la page S.V.P.

b - Montrer que si $u\,x + v\,y + w\,z = 0$ est l'équation d'un plan tangent à ce cône, alors, $u\,x + v\,y + w = 0$, $z = 1$, est une représentation cartésienne d'une tangente à C.

PREMIERE PARTIE

E est un espace euclidien réel de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

S est une matrice réelle, symétrique, à 3 colonnes. M représente, indifféremment, un point de l'espace, de coordonnées (x, y, z) , ou la matrice unicolonne d'éléments x, y, z .

$\Omega(S)$ est alors l'ensemble des points vérifiant ${}^t M . S . M = 0$.

1 - Préciser la nature de $\Omega(S)$ selon le rang r , $r \in [0, 3]$, et le signe des valeurs propres non nulles de S.

2 - On suppose désormais que S est de rang 3 , et admet des valeurs propres de signes contraires. On note alors :

[+] l'ensemble des points P tels que ${}^t P . S . P > 0$,

[-] l'ensemble des points N tels que ${}^t N . S . N < 0$.

a - Montrer que [+] x [-] est non vide.

b - (P, N) étant un élément de cet ensemble, montrer que O, P, N ne sont pas alignés.

c - Montrer que le segment [PN] a exactement un point commun avec $\Omega(S)$, et que la droite (PN) a généralement deux points communs, distincts, avec $\Omega(S)$.

On pourra paramétrer le segment, puis la droite (PN) et utiliser les propriétés des fonctions trinômes.

3 - Soit U une matrice unicolonne, non nulle, d'éléments u , v , w et $\vec{U}$ le vecteur $u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$.

a - Trouver une condition (R) vérifiée par U si, et seulement si, la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{U}$ est incluse dans $\Omega(S)$.

b - (R) n'étant pas vérifiée, soit L une droite, ne passant pas nécessairement par O, de vecteur directeur $\vec{U}$. Montrer que, lorsque M décrit L, le nombre ${}^t M . S . M$ atteint, en un point E de L, un extremum et un seul.

c - Déterminer l'ensemble des points E lorsque L décrit l'ensemble des droites de vecteur directeur $\vec{U}$.

On pourra, L fixée et l'existence et unicité de E prouvée, paramétrer L en choisissant E comme origine.

A SUIVRE

DEUXIEME PARTIE

1 - a - Montrer que si $M_0 \in \Omega(S)$, M_0 distinct de O, alors une équation cartésienne du plan tangent en M_0 à $\Omega(S)$ est ${}^t M_0 . S . M = 0$.

b - En déduire que si ${}^t D = [u , v , w]$, une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des points M tels que ${}^t D . M = 0$ soit un plan tangent à $\Omega(S)$ est : $D \neq 0$ et ${}^t D . T . D = 0$,

T étant une matrice symétrique réelle, qu'on donnera en fonction de S.

2 - a - Déduire de 1 - l'ensemble des cônes $\Omega(S)$ tangents aux trois plans de coordonnées.

b - Vérifier que ces cônes coupent le plan $z = 1$ selon des paraboles.

3 - Soit un plan muni d'un repère orthonormé. On note C(S) la conique de ce plan d'équation ${}^t X . S . X = 0$, où ${}^t X = [x, y, 1]$. Déduire de 1 - que :

a - Si $(x_0 , y_0) \in C(S)$, alors une équation de la tangente en ce point à C(S) est ${}^t X_0 . S . X = 0$.

b - Si ${}^t D = [u , v , h]$, l'ensemble des points tels que $u x + v y + h = 0$ est une droite tangente à C(S) si, et seulement si, $(u , v) \neq (0 , 0)$ et ${}^t D . T . D = 0$.

4 - Soit :

$$S_\theta = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\sin\theta . \cos\theta & -\cos\theta \\ -\sin\theta . \cos\theta & \sin^2\theta & -\sin\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$$

où θ est tel que $\cos\theta . \sin\theta \neq 0$.

a - Vérifier que $\Omega(S_\theta)$ appartient à l'ensemble trouvé en 2 - .

b - En déduire que la famille $C(S_\theta)$ est une famille de paraboles tangentes aux axes de coordonnées.

Donner une équation réduite, rapportée à un repère orthonormé, de $C(S_\theta)$.

5 - Déterminer successivement, en fonction de θ , dans l'ancien repère :

- l'axe de $C(S_\theta)$,
- la tangente au sommet t_θ ,
- le sommet s_θ ,
- la directrice d_θ (on rappelle que dans un repère orthonormé, la directrice de $Y^2 = 2 p X$ est la droite d'équation $X = \frac{-p}{2}$).

6 - Déterminer l'enveloppe de la famille des droites t_θ . Construire cette courbe.

FIN